

16.2.1 Chaos-Kriterium Periodenverdopplung

Deterministisch chaotische Systeme verhalten sich also nicht zufällig; ihr Verhalten ist nur nicht vorhersagbar. Man kennt mittlerweile Kriterien, wann die Vorausberechenbarkeit solcher Systeme aufgrund ihres nichtlinearen Verhaltens in ein chaotisches übergeht. Das wahrscheinlich bekannteste Beispiel dafür ist der Periodenverdopplungsübergang: Bei Übergang von „normalem“, vorausberechenbarem periodischem Verhalten entsprechender dynamischer Systeme (Pendel, Planetenbahnen) zum Chaos nimmt die Oszillationsperiode stufenweise um den Faktor zwei zu. Dann wird das Verhalten unvorhersagbar, irregulär.

16.2.1.1 Das Elektron am Rande des Weltalls, Billard und Lotto

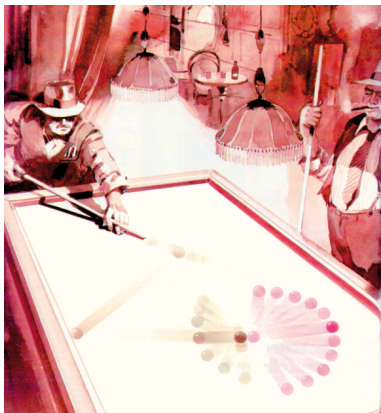
Dazu zwei erstaunliche Beispiele: Man nehme das kleinste Elementarteilchen, ein Elektron, platziere es möglichst weit weg, an den Rand des Weltalls, und betrachte die kleinstmögliche Kraft, die von ihm ausgeht, seine Gravitation: Sie reicht aus, um hier auf der Erde die Bahn eines Sauerstoffmoleküls bereits nach der 56. Kollision mit anderen Sauerstoffmolekülen unberechenbar zu machen.

Nun stößt so ein Molekül unter atmosphärischen Bedingungen pro Sekunde milliardenfach mit Seinesgleichen zusammen. In einem Gas baut sich Chaos also außerordentlich schnell auf. Aber auch die Bahn einer Billardkugel etwa wird schon nach der 9. Karambolage unberechenbar, nur weil die Gravitation eines Mitspielers Einfluss auf die Kugel nimmt (s. Abb. [berr1978]). Ähnlich sieht es übrigens bei den Lottokugeln aus.

16.3 Musterentstehung aus Chaos

Nichtlineare dynamische Systeme können neben Chaos auch andere Verhaltensweisen zeigen, wie beispielsweise Konvergenz gegen einen Ruhezustand oder gegen einen periodischen Grenzyklus.

Die Bahn einer **Billardkugel** etwa wird schon nach der 9. Karambolage unberechenbar, nur weil die Gravitation eines Mitspielers Einfluss auf die Kugel nimmt.



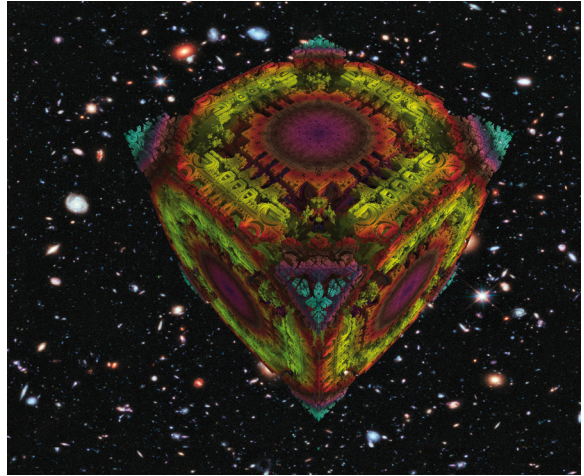
16.3.1 Mandelbrotmenge

Welches Verhalten auftritt, kann von den Anfangsbedingungen oder von anderen Kontrollparametern abhängen. Eine grafische Darstellung der entsprechenden Einzugsgebiete für bestimmte Verhaltensweisen als Funktion dieser Parameter ist oft fraktal. Das bekannteste Beispiel eines Fraktals ist wohl das Apfelmännchen, wissenschaftlich die Darstellung einer Mandelbrotmenge (s. Abb.), die sich aus einer mathematischen Folge ergibt. Das Bildungsgesetz, das der Folge zugrunde liegt, ist die einfachste nichtlineare Gleichung, anhand der sich der Übergang von Ordnung zu Chaos durch Variation eines Parameters provozieren lässt. Der Übergangsbereich zu chaotischem Verhalten zeichnet sich dabei durch bestimmte Eigenschaften aus, wie beispielsweise plötzliche qualitative Änderungen des Verhaltens, die auch als Bifurkation bezeichnet werden.

16.3.2 Attraktoren

Wenn sich etwas deterministisch chaotisch bewegt, kann dabei dennoch quasi ein Muster im Raum auftauchen. Das lässt sich erkennen, wenn man Werte, die man aus den dieses System beschreibenden Gleichungen erhält, als Punkte in einem Raum (Phasenraum) anordnet. Die Koordinatenachsen des Phasenraums eines chaotischen Systems sind durch den Satz seiner unabhängigen Zustandsgrößen und deren Geschwindigkeiten gegeben. Beim Beispiel Pendel wird der Phasenraum durch den Auslenkwinkel und die zugehörige Winkelgeschwindigkeit aufgespannt.

Die einzelnen Punkte eines Musters im Phasenraum sind zwar wiederum nicht vorhersehbar, d. h. wenn dem Punkt 1 ein Punkt 2 folgt, muss einem Nachbarnpunkt 3 nicht auch ein Punkt 4 in ähnlicher Relation wie zwischen den Punkten 1 und 2 folgen. Dennoch ergeben alle diese Punkte ein Muster. Für die Punkte im Phasenraum gesprochen bedeutet dies: Trotz unterschiedlicher Anfangsbedingungen streben sie immer auf dieselben Bahnen zu, einem „Attraktor“ – oder auf ähnliche Bahnen, aber immer irgendwie abweichend, mit fraktaler Geometrie; das nennt man dann „seltsamer Attraktor“ (s. Abb.).



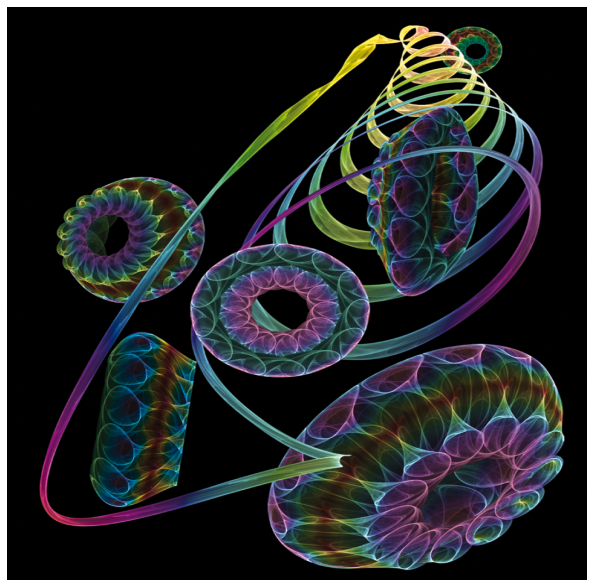
Dies ist nicht etwa eins der Kubus-Raumschiffe, mit denen die „Borg“ in Filmen der „Star Trek“-Science Fiction-Serie durchs Weltall fliegen. Vielmehr handelt es sich um eine mit einem Mandelbrotgenerator erzeugte Grafik; **Mandelbrotmengen** sind eben nicht nur „Apfelmännchen“. Diese wurde hinterlegt mit einem Bild des Weltraumteleskop-Hubble-Projektes eXtreme Deep Field XDF.

3D-gerenderte
Funktionen seltsamer
Attraktoren.

16.3.3 Energy

Dissipation Pathways

Es gibt noch andere Prozesse, die aus Chaos heraus zu Selbstorganisation führen. So wird ein Mechanismus postuliert, der maßgeblich zum Ablauf der Evolution und zur Entstehung des Lebens beitragen soll. Gemeint ist damit das sich selbstorganisierende Verzweigen von Energieflüssen. So formulierte der rumänisch-Amerikanische Ingenieur und Physiker Adrian Bejan von der Duke Universität eine Theorie, die „Constructal Theory“ (CT): „For a finite size system to persist in time – to





Die einführende Illustration des Artikels „The Evolving Design of Our Life“ von Adrian Bejan in der Zeitschrift LA + DESIGN (Ausgabe 09, Frühjahr 2019) zeigt das Adernggeflecht als ein Beispiel seiner **Constructal Theory**.

live, it must evolve in such a way that it provides easier access to the imposed currents that flow through it.“ [beja2010]

Ihre Grundaussage ist: Damit ein endliches fließendes System im Lauf der Zeit bestehen oder überleben kann, muss das System seine Konfiguration so entwickeln, dass die Ströme, die ihn ihm fließen, einen immer besser werdenden Durchgang finden. Wichtig dabei ist, dass das System auch die Freiheit hat sich zu entwickeln. Jeremy England, Physiker am MIT formuliert in ähnlicher Hinsicht eine „dissipation driven adaption of matter“, der amerikanische Erfinder Alexander Nugent beschreibt dieses Entwicklungsprinzip als „energy dissipation pathways competing for conducting resources“. Von mir stammt das Postulat: Je weiter ausgelaufen eine Evolutionsstufe ist – man könnte im Hinblick auf den Urknall auch sagen: je geringer die ursprüngliche Energiedichte wird, desto höher ist die Differenzierung von Objekten, Strukturen, Informationen in diesen Evolutionsstufen. Die Strukturen, Prozesse und Systeme entwickeln sich am schnellsten, am effektivsten, in denen der gesamte Informationsfluss am höchsten ist, am besten funktioniert.

Als Beispiele gelten in der Natur der Blitz, Flussdeltas, das verästelte System, mit dem Pflanzen Wasser und Nährstoffe bis in die Blätter transportieren oder das Netz der Blutgefäße und sowie biologische neuronale Netze (s. Abb.). In unserer Kultur zeigen dies die Straßen- und Infrastrukturnetze, die immer wieder so adaptiert werden, dass je nach Transportart Menschen oder Güter möglichst effizient an ihr Ziel kommen. Die CT erklärt auch folgende menschliche Eigenschaft: Von der Luftröhre bis zu den Lungenbläschen, die Alveolen genannt werden, zählt man durchschnittlich 23 Verzweigungen. In die entsprechende Rechnung fließen u. a. die Gesamtlänge der Atemwege ein, die gesamte Alveolarfläche sowie der Gesamtwi- derstand des Sauerstofftransports im Atmungsbaum. Ebenso lässt sich die

Proportionalität zwischen der optimalen Fluggeschwindigkeit fliegende Körper (Insekten, Vögel, Flugzeuge) und ihre jeweiligen Massen erklären.

16.3.3.1 *Constructal Theory gegen Gleichmacherei*

Die CT wurde auch auf das System Sonne, Erde und Weltall angewendet. Betrachtet man das Ganze als eine gigantische Wärmemaschine, so wird die geleistete Arbeit zum Antrieb der Meeres- und Luftströme genutzt. Auch Betrachtungen von Umwelt- und gesellschaftlichen Vorgängen erlaubt die Constructal Theorie – und gibt teilweise Erkenntnisse, die insbesondere dem Kommunismus nicht gut schmecken werden: Der Energieverbrauch pro Kopf in den entwickelten Ländern beispielsweise ist höher als in den unterentwickelten. Man könnte aus Überlegungen der Gerechtigkeit anstreben, dass wir zu Gunsten der anderen unseren Verbrauch reduzieren und möglichst eine Gleichverteilung anstreben sollten. Eine Maßnahme dazu wäre, pro Kopf der Weltbevölkerung ein fixes CO₂-Kontingent festzulegen.

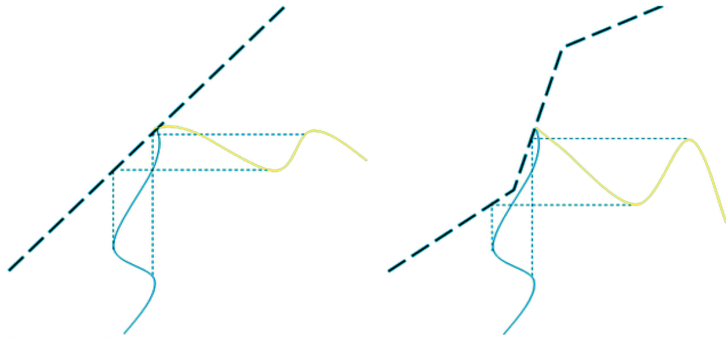
Allerdings: Unsere Massenströme (Güter, Energieträger) sind notwendigerweise nicht gleichmäßig verteilt, denn Fortschritt und Optimierung besteht gerade darin, mehr Masse, Information etc. über längere Distanzen oder über gleiche Strecken in kürzeren Zeiten entlang bestimmter Kanäle zu transportieren. Die CT zeigt nun, dass dafür nicht Gleichmäßigkeit die beste Lösung ist. Dies führt letztendlich zum Stillstand. Nach der CT setzt sich ein System durch, welches seine Unzulänglichkeiten so verteilt, dass der Gesamtwiderstand minimal wird. Hierzu verlagert es Kanäle mit großem Widerstand in Gebiete mit geringem Transportaufkommen [hütt2010].

16.4 Quantenchaos, Determinismus, Zufall

Nicht zu unterschlagen: Auch mit der Quantenwelt lässt sich Chaos in Verbindung bringen. Bekanntlich sind Ort und Impuls eines Objektes nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar. Diese Unschärfe ist bei makroskopischen Systemen gewöhnlich vernachlässigbar. Da sie bei chaotischen Systemen jedoch beliebig wächst, nimmt sie früher oder später makroskopische Dimensionen an. Hier kommt auch der Zufall zur Sprache. Es gibt ja wie bereits angesprochen auch stochastisches Chaos bzw. stochastische Prozesse, in denen nur der Zufall herrscht.

In der Quantenwelt gilt der radioaktive Zerfall als Prototyp für zufällige Ereignisse. Tatsächlich ist bis heute letztlich noch unentschieden, ob es sich dabei um einen echten Zufall handelt, oder auf die Deterministik der Welt auch in diese Bereiche vorgedrungen ist und noch unentdeckte – deterministische – Vorgänge den radioaktiven Zerfall verursachen. Die Einschätzung, ob unsere Welt in ihren Grundbausteinen deterministisch oder indeterministisch sei, hängt davon ab, welche Interpretation und philosophische Haltung man einnimmt [zalt2016].

Von den letztgenannten Aspekten abgesehen gilt jedoch, dass man (deterministisches) Chaos, Emergenz und Selbstorganisation in ihrer Entwicklung beschreiben kann.



Statisches nichtlineares System: Veranschaulichung einer linearen Kennlinie (= lineares System, linkes Diagramm) gegenüber einer nichtlinearen Kennlinie (= nichtlineares System, rechtes Diagramm). Die gestrichelte Diagonale veranschaulicht die lineare bzw. nichtlineare Transformation, die blaue Kurve ist das Eingangs-, die gelbe das Ausgangssignal.

16.5 Nichtlinearitäten

Selbstorganisationsprozesse beinhalten typischerweise auch nichtlineare Phasen: kleine Änderungen haben eine große Wirkung. Man spricht auch von schwacher Kausalität: Haben bei starker Kausalität ähnliche Ursachen ähnliche Wirkungen, lassen sich bei schwacher Kausalität sehr unterschiedliche Wirkungen auf ähnliche Ausgangssignale beobachten. Dies ist der Fall, wenn sich die Anfangsbedingungen in der Nähe eines labilen Gleichgewichts befinden: ein sehr kleiner Stoß auf eine Kugel, die sich im labilen Gleichgewicht auf einer Anhöhe befindet, kann Rollen in verschiedenste Richtungen verursachen. Als plastischer Begriff für dieses Verhalten hat sich der Schmetterlingseffekt etabliert: Das Schlagen des Flügels eines Schmetterlings in China kann in Deutschland einen Sturm verursachen. Ein Beispiel dafür beschreibt das Dreikörperproblem: Wenn etwa mehr als zwei Himmelskörper gravitativ aneinander gebunden sind, können minimale Änderungen der Ausgangssituation im Laufe der Zeit zu großen nichtvorhersagbaren Änderungen der Bahnen und Positionen führen.

Nichtlineare Systeme sind allgemein dargestellt Systeme, welche auf Eingangssignale (Systemreize) nicht in jedem Bereich proportional antworten (s. Abb.). Sie sind wesentlich komplexer als lineare Systeme. Auch wenn man für viele Anregungen eines solchen Systems sein Verhalten, seine Antworten kennt, heißt es trotzdem, für neue Reize kann man das Verhalten nicht voraussehen. Da es zu nichtlinearen Systemen keine geschlossene mathematische Theorie gibt, gibt es auch keine allgemeine Methode zur Analyse unbekannter nichtlinearer Systeme.

16.5.1 Statische nichtlineare Systeme

Man unterscheidet zudem noch statische und dynamische nichtlineare Systeme. Bei statischen erfolgt die Antwort unmittelbar auf das Eingangssignal. Sie lassen sich im allgemeinen durch algebraische Gleichungen beschreiben.

16.5.2 Dynamische nichtlineare Systeme

Dynamische nichtlineare Systeme besitzen hingegen Speicherelemente, ein „Gedächtnis“. Ihre Antwort hängt von der Stärke vorhergehender Eingangssignale, von einer „Vorgeschichte“ ab.

16.5.3 Positive Rückkopplung

Um einen nichtlinearen Effekt zu erreichen, bedient sich die Selbstorganisation einer positiven Rückkopplung. Oftmals ist Selbstorganisation auch verbunden mit Phasenwechseln, im physikalischen Beispiel gezeigt als der Wechsel von flüssig zu fest.

Allgemein versteht man unter Selbstorganisation das spontane Entstehen neuer Strukturen in offenen dynamischen Systemen, das auf das Zusammenwirken von Teilsystemen zurückgeht. Selbstorganisation führt zwar zu Strukturen höherer Ordnung, allerdings auf Kosten einer Erhöhung der Entropie des Gesamtsystems. Das bedeutet, dass für die Selbstorganisation Energie hinzugefügt werden muss.

16.6 Synergetik: Wenn Ordnungsparameter versklaven

Ein selbstorganisierendes System zeigt oft sehr gute Eigenschaften bezüglich der Skalierbarkeit und der Robustheit gegenüber Parameteränderungen oder Störeinflüssen. Sie eignen sich daher als Grundlage für die Konstruktion komplexer technischer Systeme. Allerdings gibt es keinen einfachen Algorithmus, um die notwendigen lokalen Regeln für ein erwünschtes globales Verhalten zu erzeugen. Bisherige Ansätze bauen zum Beispiel auf Versuch und Irrtum auf und erwarten ein grundsätzliches Systemverständnis durch den Ingenieur. Für die Entwicklung künstlicher, technischer Systeme ist entscheidend, herauszufinden, wie man Kontrollparameter (s. u.) konfigurieren muss, um gewünschte Ergebnisse zu erhalten.

Wie gerade angemerkt gibt es keine geschlossene mathematische Theorie zu nichtlinearen Systemen. Dennoch gibt es Ansätze zur Untersuchung nichtlinearer Systeme, untersucht in der „Nonlinear Science“. Die wohl wichtigste Theorie dazu ist insbesondere in Deutschland unter Synergetik bekannt geworden. Formuliert hat sie beginnend in den 1960er Jahren der Physiker Hermann Haken (geb. 1927; s. Abb. nächste Seite). Sie beschreibt die Selbstorganisation von Systemen, die sich aus hinreichend vielen miteinander wechselwirkenden Einzelsystemen zusammensetzen und zu emergenten Vorgängen führen. Es geht also um das Zusammenwirken von Elementen gleich welcher Art, die innerhalb eines komplexen dynamischen Systems miteinander in Wechselwirkung treten, beispielsweise Moleküle, Zellen oder Menschen. Die Synergetik liefert eine einheitliche mathematische Beschreibung dieser Phänomene, die universell in der Physik, Chemie, Biologie und Soziologie vorkommen.

16.6.1 Beispiel Laser

Ausgangspunkt der Synergetik war die statistische Physik der Nichtgleichgewichtssysteme. Sie behandelte zunächst rein physikalische Systeme.